Physik.

Farbmessungen zur Prüfung des Schrödingerschen Linienelements der höheren Farbenmetrik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

vorgelegt von

Joachim Rosemann

aus Sagan

Breslau 1938

Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei E. G. m. b. H., Breslau 1, Ursulinerstr. 1

Meinem Vater!

Referent: Professor Dr. Schaefer
Korreferent: Professor Dr. Fues

Examen rigorosum: 16. Februar 1938.

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Die Arbeit erscheint in der Zeitschrift „Annalen der Physik"
5. Folge, Band 32, Heft 7, 1938.

Farbmessungen zur Prüfung des Schrödingerschen Linienelements der höheren Farbenmetrik

Von Joachim Rosemann

nebst einer Vorbemerkung von Cl. Schaefer

(Mit 7 Abbildungen)

Sonderabdruck aus ***Annalen der Physik*** *5. Folge · Bd. 32 · Heft 7 · 1938*

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH IN LEIPZIG

Printed in Germany

Vorbemerkung

Der Plan zu der vorliegenden Arbeit wurde bereits vor Jahren in Besprechungen zwischen mir und Dr. H. Pese festgelegt, desgleichen wurde die Apparatur in großen Zügen entworfen. Herr Dr. Pese hat sodann die Apparatur ausgeführt und vorläufige Messungen an ihr mit provisorischen Filtern ausgeführt, die ihre grundsätzliche Brauchbarkeit ergaben. Äußere Gründe zwangen dann Herrn Dr. Pese, die weitere Untersuchung aufzugeben, die dann von Herrn Dr. V. Stipa mit einem Forschungsstipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft aufgenommen wurde. Dieser hat die Apparatur nach früheren und eigenen Erfahrungen verbessert und umfangreiche Messungen ausgeführt. Sie sind aus folgendem Grunde nicht veröffentlicht: Bei der Verschiebung der Filter war keine Helligkeitsgleichheit erzielt, so daß die Stipaschen Messungen nicht in einem isolychnischen Farbdreieck ausgeführt wurden. Das macht seine Ergebnisse schwer deutbar. Bevor die Apparatur so ausgeführt werden konnte, wie sie im folgenden beschrieben ist, mußte auch Herr Dr. Stipa von der Arbeit zurücktreten, da er eine Stellung in der Industrie annahm. An seine Stelle trat Herr Dr. Rosemann, der im folgenden darüber berichtet.

Ich möchte den Herren Pese und Stipa auch an dieser Stelle meinen Dank für ihre wertvolle Vorarbeit aussprechen, ebenso Herrn Schrödinger für seine fördernde Diskussion bei den Stipaschen Messungen.

Clemens Schaefer.

§ 1. Das Schrödingersche Linienelement. Methoden zu seiner Prüfung

Mit der höheren Farbenmetrik wird der Versuch unternommen, der Fähigkeit des Auges, in einer Farbenmischapparatur zwei aneinandergrenzende Farbfelder auf Ebenunterscheidbarkeit oder — unter gewissen Nebenbedingungen — auf größte Ähnlichkeit einzustellen, einen mathematischen Ausdruck zu verleihen. Als Grundlage hierfür dient die Darstellung der Farben in einem dreidimensionalen Raum nach der Young-Helmholtzschen Theorie, dessen ausgezeichnete Koordinaten die drei irreellen Grundempfindungen, die Fehlfarben der Dichromaten, sind. Innerhalb eines Oktanten dieses Raumes erfüllen die reellen Farben einen Kegel mit der Spitze im Nullpunkt, dessen Mantel die drei Koordinatenebenen berührt und in einem

Farbendreieck die Kurve der reinen Spektralfarben und die geradlinige Verbindung ihrer Endpunkte, die Purpurgerade, bildet. Diesem Raum werden von den reinen Gleichheitsurteilen des Auges die Gesetze einer affinen Geometrie verliehen, welche als niedere Farbenmetrik zusammengefaßt werden.

Wird nun die naheliegende Forderung gestellt, daß die Punkte zweier ebenunterscheidbarer Farben unabhängig von ihrer speziellen Wahl stets gleiche Entfernung von einander haben sollen, so kann als Maß für den Abstand zweier beliebiger Punkte und damit zugleich als Maß für die Ähnlichkeit der beiden zugehörigen Farben die Zahl der Schritte der Ebenunterscheidbarkeit angesehen werden, welche mindestens zwischen beiden eingeschaltet werden müssen. Zwei Farben sind dann unter Nebenbedingungen am ähnlichsten, wenn die zugehörigen Punkte sich durch ein relatives Minimum ihres gegenseitigen Abstandes auszeichnen. Der euklidische Abstand erfüllt diese Forderungen nicht. Von Helmholtz[1]) stammt der später von Schrödinger[2]) wieder aufgegriffene Gedanke, durch die nichteuklidische Maßbestimmung einer Riemannschen Geometrie eine empfindungsgemäße Darstellung der Farburteile des Auges in diesem Farbenraum zu ermöglichen. Das von dem letzteren vorgeschlagene und in der vorliegenden Arbeit auf seine Brauchbarkeit zu untersuchende Linienelement, welches die Geometrie eindeutig festlegt, hat die einfache Form:

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} \left(\frac{\alpha_1 \, dx_1^2}{x_1} + \frac{\alpha_2 \, dx_2^2}{x_2} + \frac{\alpha_3 \, dx_3^2}{x_3} \right),$$

wobei die x_i die drei Grundempfindungskoordinaten der Farbe und α_i die von Exner[3]) eingeführten Helligkeitskoeffizienten sind. Seine Wahl beruht auf der Gültigkeit des Weber-Fechnerschen Gesetzes, welche allerdings auf einen begrenzten Bereich der Helligkeit beschränkt ist, sowie des Gesetzes von der Additivität der Helligkeiten, wonach diese sich aus den drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch den linearen Ausdruck

$$(2) \qquad h = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

ergeben soll. Es ist nicht das einzig mögliche Linienelement, welches diese beiden Gesetze befriedigt, führt aber zu einigen einfachen Folgerungen, die hier erwähnt seien. Die Flächen konstanter Helligkeit sind Ebenen, welche die zweidimensionale Darstellung gleichheller Farben in der Form des gleichseitigen Farbendreiecks ermöglichen.

1) H. v. Helmholtz, Handb. d. physiol. Optik, 2. Aufl. 1896.
2) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. [4] **63**. S. 397, 427, 481. 1920.
3) F. Exner, Sitzber. d. Wien. Ak. d. Wiss. (2a) **129**. S. 36. 1920.

Der Abstand zweier beliebiger Punkte wird bestimmt durch das Integral $\int_p^{p'} ds$, welches längs einer kürzesten oder geodätischen Linie berechnet den Wert

$$(3)\qquad \int_p^{p'} ds = \sqrt{\left(\lg \frac{\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3'}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}\right)^2 + 4\left(\arccos \frac{\alpha_1 \sqrt{x_1 x_1'} + \alpha_2 \sqrt{x_2 x_2'} + \alpha_3 \sqrt{x_3 x_3'}}{\sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}\sqrt{\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3'}}\right)^2}$$

besitzt. In einem gleichhellen Farbendreieck bilden die geodätischen Linien die Schar der dem Dreieck eingeschriebenen Ellipsen, von denen die durch den Weißpunkt, den Mittelpunkt des Dreiecks gehenden als Linien konstanten Farbtons anzusprechen sein werden, da sie den kürzesten Übergang von einer reinen Spektral- oder Purpurfarbe zum gleichhellen Weiß vermitteln. Als gleich gesättigt dagegen werden die Farben anzusehen sein, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkt bei gleicher Helligkeit haben. Sie liegen also auf geodätischen Kreisen um den Weißpunkt und sind durch

$$(4)\qquad S = 2 \arccos \frac{\alpha_1 \sqrt{x_1} + \alpha_2 \sqrt{x_2} + \alpha_3 \sqrt{x_3}}{\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)}}$$

definiert. Ihre geodätischen Radien sind die Linien konstanten Farbtons. Für zwei ebenunterscheidbare Farben darf der Wert ds selbst als der zugehörige Abstand betrachtet werden.

Es erhebt sich nun die Frage nach den verschiedenen Möglichkeiten, diesen Ansatz für das Linienelement an der Erfahrung zu prüfen. Über die vielen Untersuchungen, welche sich mit Messungen der Ebenunterscheidbarkeit und größten Ähnlichkeit bestimmter ausgezeichneter Farben befassen, ist von Schober[1]) zusammenhängend berichtet worden. Am zahlreichsten sind Bestimmungen der Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für die reinen Spektralfarben vorhanden. Schrödinger selbst prüft sein Linienelement an Messungen dieser Art von Uhthoff[2]), derselbe Vergleich wird bei Bouma und Heller[3]) an den Messungen von Uhthoff, Steindler, Jones, Haase, Tyndall und König und Dieterici[4]) durchgeführt. Ob-

1) H. Schober, Phys. Ztschr. **38**. S. 514. 1937.

2) W. Uhthoff, Arch. f. Ophtalm. **34**. IV. S. 1. 1888.

3) P. J. Bouma u. G. Heller, Proc. d. koninkl. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam, **38**. S. 35, 148, 258. 1935.

4) W. Uhthoff, a. a. O., O. Steindler; Sitzber. d. Wien. Akad. d. Wiss. **115**. IIa. S. 39. 1906; L. A. Jones, Journ. Opt. Soc. Amer. **1**. S. 63. 1917; G. Haase, Ann. d. Phys. [5] **20**. S. 75. 1934; Tyndall, Journ. Opt. Soc. Amer. **23**. S. 20. 1933; A. König u. C. Dieterici, Wied. Ann. **22**. S. 579. 1884.

wohl sich hierbei zumindest qualitativ einige Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung ergibt, dürfte größere Beweiskraft doch *den* Rechnungen zukommen, welche eine hier angewandte graphische Bestimmung von Differentialquotienten vermeiden. Das ist der Fall bei der von Bouma und Heller durchgeführten Auswertung der Messungen von Jones und Lowry[1]), welche an acht verschiedenen Stellen die Anzahl der Schritte der Ebenunterscheidbarkeit bestimmten, die auf der geradlinigen (also nichtgeodätischen!) Verbindung einer reinen Spektralfarbe mit dem Weißpunkt liegen. Die schwierige Bestimmung des Integrals $\int ds$ längs einer nichtgeodätischen Linie wurde durch Einführung des Begriffes des spektralen Farbanteils σ, der eine der niederen Farbenmetrik entlehnte Definition der Sättigung darstellt, umgangen. Bezeichnet w_i die Koordinaten des Weißpunktes, $\bar{x}_i$ die einer reinen Spektralfarbe, und schließlich x_i diejenigen eines Punktes ihrer geradlinigen Verbindung, so ist im gleichseitigen Dreieck $\sigma = \frac{x_i - w_i}{\bar{x}_i - w_i}$, also gleich Null für den Weißpunkt und gleich Eins für eine Spektralfarbe. Die aus den berechneten Werten von $ds/d\sigma$ gewonnene Kurve wurde zwischen diesen Grenzen integriert. Das Ergebnis war ein vollkommenes Versagen des Schrödingerschen Ansatzes (1), welcher zwischen 510 und 590 mμ zu kleine, an den Enden des sichtbaren Spektrums dagegen viel zu große Werte, etwa das 4—5fache des experimentellen Resultates, lieferte.

Davon unterscheidet sich der von Klughardt und Richter[2]) eingeschlagene Weg, aus Einstellungen auf größte Ähnlichkeit Farben von empfindungsgemäß gleicher Sättigung zu bestimmen und die so gewonnene Linie konstanter Sättigung mit den nach Gl. (4) berechneten zu vergleichen. Durch ein an 9 Versuchspersonen durchgeführtes statistisches Verfahren wird von den auf einer Geraden durch den Weißpunkt liegenden Farben diejenige ermittelt, welche einer im Farbton davon nicht allzu verschiedenen festen Farbe am ähnlichsten ist, und dieser wird die gleiche Sättigung wie der festen Farbe zugeschrieben. Sie bildet zugleich den festen Ausgangspunkt für die nächsten Messungen, mit denen Schritt für Schritt der Weißpunkt einmal umlaufen wird. Die so erhaltene Sättigungslinie ist nur wenig verschieden von derjenigen, die sich durch Verbindung der nach den Messungen von Jones und Lowry gleich weit vom Weißpunkt entfernten Punkte ergibt, so daß auch hier die gleichen Abweichungen von der

1) L. A. Jones u. E. M. Lowry, Journ. Opt. Soc. Amer. **13**. S. 25. 1926.
2) A. Klughardt u. M. Richter, Ztschr. f. Sinnesphysiol. **66**. S. 103. 1935/36.

Theorie auftreten. Die für die ermittelten ähnlichsten Punkte nach Gl. (4) berechneten Sättigungszahlen sind nicht konstant, wie man bei Übereinstimmung mit dem Schrödingerschen Ansatze erwarten sollte, die größte Schwankung tritt aber gerade bei den blauen Farben ein. Dadurch wird die Frage nahegelegt, ob das Versagen der Theorie nicht lediglich auf den Einfluß des ungenau bestimmten blauen Helligkeitskoeffizienten α_3 zurückzuführen ist. Ferner bleibt zu bedenken, daß die Variation einer Farbe längs einer Geraden durch den Weißpunkt keine reine Sättigungsänderung ist, sondern gleichzeitig auch eine Veränderung des Farbtones bewirkt, deren Einfluß auf die beschriebenen Einstellungen auf größte Ähnlichkeit, welche als Einstellung auf gleiche Sättigungen gedeutet werden, sich nur schwer abschätzen läßt. Immerhin enthält die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Messungen von Jones und Lowry einerseits, Klughardt und Richter anderseits eine Bestätigung für die Richtigkeit des in der Theorie zum Ausdruck gebrachten allgemeinen Gedankens, das Abstandsmaß aus dem Begriff der Ebenunterscheidbarkeit abzuleiten.

Obgleich schon die Ergebnisse dieser Arbeiten wenig zugunsten des Ansatzes (1) sprechen, dürften weitere Prüfungen nicht überflüssig sein, zumal die Frage nach der Wahl geeigneter Helligkeitskoeffizienten besonders stark in dem letztgenannten Vergleich hervortritt. Einstellungen auf größte Ähnlichkeit, welche das Prinzip der hier durchgeführten Messungen bilden sollen, lassen sich auch theoretisch exakt und leicht berechnen, da sie ja nur in der Bestimmung solcher ausgezeichneter Punkte bestehen, deren gegenseitiger, durch Gl. (3) bestimmter Abstand unter gewissen einschränkenden Nebenbedingungen ein relatives Minimum ist. Seine Bestimmung vereinfacht sich durch die Forderung, daß die beiden zu vergleichenden Farben konstante und gleiche Helligkeit haben sollen; dadurch verschwindet das erste Glied der rechten Seite von (3). Da es für die spätere Rechnung zweckmäßig ist, die Bedingungen so einfach wie möglich zu halten, wird als weitere Forderung den hier durchzuführenden Messungen die Einschränkung auferlegt, daß von den beiden zu vergleichenden Farben die eine fest, die andere auf einer Geraden im Farbendreieck variabel sein soll. Dann bedeuten die Messungen nichts weiter als die Bestimmung der Fußpunkte geodätischer Lote, die innerhalb eines isolychnischen Farbendreiecks von festen Punkten auf gewisse Geraden gefällt werden können.

Während diese beiden Forderungen dem Wunsch nach einer Vereinfachung der Rechnungen entsprungen sind, bleibt zur Erhöhung der Meßgenauigkeit die Tatsache auszunutzen, daß das Auge gegen

Änderungen des Farbtones empfindlicher als gegen solche der Sättigung ist. Zweckmäßig werden daher die Variationsgeraden im Farbendreieck so gewählt, daß die zu ihnen gehörigen Farben sich hauptsächlich im Farbton, weniger in der Sättigung voneinander unterscheiden.

§ 2. Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung zur Durchführung dieser Messungen ist in Abb. 1 skizziert. Richtet man eine aus zwei kreisförmigen Blenden B_3 und B_4 bestehende Visiervorrichtung auf die vordere Kante eines Gipsprismas, so verschwindet durch die monokulare Beobachtung der räumliche Eindruck, und es erscheint ein durch die Prismenkante

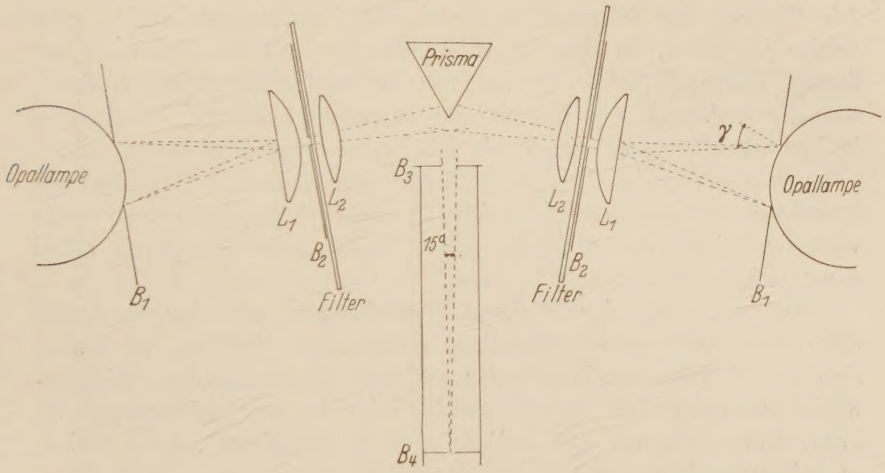

Abb. 1

in zwei Hälften geteiltes, zu photometrischen Messungen geeignetes Gesichtsfeld. Diesem wurde durch einen Barytweißanstrich auf dem Prisma eine rein weiße Grundfarbe gegeben. Zwei getrennte Projektionsvorrichtungen bildeten die Lichtquellen für die beiden Prismenflächen und gestatteten die unabhängige Beleuchtung der beiden gegeneinander zu photometrierenden Gesichtsfeldhälften. Diese beiden symmetrisch gebauten Projektionseinrichtungen besaßen als Lichtquellen je eine horizontal gestellte Osram-Opalglaslampe von 110 Volt, 300 Watt, von denen die Blenden B_1 nur eine kreisförmige Fläche von 5 cm Durchmesser frei ließen. Ein System von 2 Linsen bildete die Ebene von B_1 auf die entsprechende Fläche des Gipsprismas ab, eine wassergekühlte Verkleidung der Lampen sorgte für Schutz gegen störendes Nebenlicht und diente zugleich als Träger für L_1, L_2, die Filter und B_2.

Durch die Verlegung des Brennpunktes von L_1 in die Ebene von B_1, die auf das Prisma abgebildet wurde, und damit zugleich mit genügender Genauigkeit auf die Glasfläche der Lampe, wurde zwischen den beiden Linsen ein fast völlig paralleler Strahlengang erreicht. An dieser Stelle befanden sich je 2 meßbar veränderliche Blenden, welche übereinander angeordnet einen Farbspalt und einen Weißspalt enthielten. Dicht vor diese Spalte konnten verschiedene Farbfilter eingeschaltet werden. Diese Meßblenden B_2 waren folgendermaßen eingerichtet: der vertikale Farbspalt, ein Bilateralspalt mit einer konstanten Höhe von 24 mm, lag mit seinem Mittelpunkt in der optischen Achse des Systems. Durch eine mit Teiltrommel versehene Schraubvorrichtung konnte seine Breite beliebig variiert werden. Die Teilung der Trommel entsprach dabei Öffnungen von $^1/_{10}$ mm Breite je Strich, so daß $^1/_{100}$ mm sich gut schätzen ließen. Über diesem Farbspalt, etwa 20 mm von der optischen Achse entfernt, war der Weißspalt angebracht, eine rechteckige Blende, welche sich in ihrer Breite durch einen mit Millimeter- und Noniusteilung versehenen Schieber, in ihrer Höhe durch eine weitere mit Teiltrommel versehene Schraubvorrichtung bis zu einer Gesamthöhe von 6 mm verstellen ließ. Jeder Strich dieser Teiltrommel entsprach dabei einer Höhendifferenz von $^1/_{100}$ mm.

Ist nun etwa der Weißspalt geschlossen und der Farbspalt mit einem bestimmten Farbfilter vollkommen bedeckt, so lassen sich die 3 Farbkoordinaten der auf der entsprechenden Prismenfläche erscheinenden Farbe, welche hier in der Reihenfolge rot, grün, blau stets mit den Indizes 1, 2, 3 bezeichnet werden sollen, in bekannter Weise durch den Ausdruck

$$x_i = \int_{400}^{700} D(\lambda)\, E(\lambda)\, G_i(\lambda)\, d\lambda \tag{5}$$

berechnen. Dabei sind mit $D(\lambda)$ die Durchlässigkeit des Filters, mit $E(\lambda)$ die Energieverteilung der Lampe und mit $G_i(\lambda)$ die Werte der dazugehörigen Grundempfindungskurve, bezogen auf ein Spektrum konstanter Energie, bezeichnet. Für die letzteren wurden die von König-Ives[1]) stammenden Werte benutzt. Als Farbfilter dienten folgende Gläser der Firma Schott u. Gen. Jena: zwei Rotfilter RG 2, das Grünfilter VG 2 und das Blaufilter BG 12. Da auf das eine der beiden Rotfilter später noch eine Glasplatte gekittet und hierdurch

1) A. König u. C. Dieterici, Ztschr. f. Psychol. u. Phys. d. Sinnesorgane **4**. S. 241. 1892; H. E. Ives, Journ. Frankl.-Inst. **180**. S. 673. 1915; **195**. S. 23. 1923; Journ. Opt. Soc. Amer. **7**. S. 243. 1923.

die Durchlässigkeit etwas verändert wurde, sind die beiden durch a und b unterschieden. Vor dem Weißspalt dagegen wurde ein Gelatinetageslichtfilter N 34 der Abteilung Farbforschung des Deutschen Forschungsinstituts für Textilindustrie, Dresden, sowie ein weiteres Gelatinefilter unbekannter Herkunft gesetzt, welches hier mit G 2 bezeichnet sei. Da das Filter N 34 auch doppelt benutzt wurde, mußten in diesem Falle zur Berechnung der Farbkoordinaten die Werte $D^2(\lambda)$ in Gl. (5) eingesetzt werden. Die Durchlässigkeiten dieser Filter sind in Tab. 1 zusammengefaßt: Sie wurden an einem König-Martens-Spektralphotometer bei senkrecht durchfallendem Licht bestimmt. Aus diesem Grunde war es wichtig darauf zu achten, daß auch in den Projektionseinrichtungen die Filter senk-

Tabelle 1

λ ($m\mu$)	Durchlässigkeiten der Farbfilter						Relative Energieverteilung der Opallampen	Durchlässigkeit des Opalglases
	N 34	G 2	RG 2a	RG 2b	VG 2	BG 12		
400	—	—	—	—	—	—	13	—
410	0,350	0,436	—	—	—	0,661	41	—
420	0,375	0,450	—	—	—	0,676	73	—
430	0,403	0,494	—	—	—	0,664	111	—
440	0,438	0,580	—	—	—	0,629	151	0,00059
450	0,457	0,670	—	—	—	0,559	192	63
460	0,430	0,661	—	—	0,001	0,470	232	67
470	0,398	0,620	—	—	0,004	0,335	273	70
480	0,348	0,554	—	—	0,010	0,180	319	73
490	0,303	0,464	—	—	0,024	0,075	366	76
500	0,269	0,324	—	—	0,049	0,033	416	0,00079
510	0,242	0,159	—	—	0,077	0,009	464	82
520	0,212	0,052	—	—	0,095	—	518	85
530	0,194	0,025	—	—	0,092	—	576	88
540	0,180	0,018	—	—	0,072	—	636	90
550	0,172	0,003	—	—	0,047	—	695	92
560	0,167	—	—	—	0,026	—	752	93
570	0,158	—	—	—	0,012	—	813	95
580	0,154	0,002	—	—	0,004	—	875	97
590	0,152	0,099	—	—	0,001	—	940	99
600	0,144	0,282	—	—	—	—	1003	0,00100
610	0,126	0,301	—	—	—	—	1069	102
620	0,102	0,216	0,006	0,007	—	—	1132	103
630	0,082	0,134	0,137	0,206	—	—	1190	103
640	0,071	0,118	0,629	0,649	—	—	1240	103
650	0,065	0,189	0,829	0,849	—	—	1283	102
660	0,062	0,368	0,880	0,901	—	—	1318	098
670	0,057	0,558	0,885	0,922	—	—	1317	091
680	0,054	0,691	0,875	0,895	—	—	1258	083
690	0,050	0,722	0,858	0,857	—	—	1142	074
700	0,049	0,684	0,858	0,810	—	—	1006	066

recht zum Strahlengang standen, damit nicht, da bei den in der Masse gefärbten Gläsern die Durchlässigkeit exponentiell von der Dicke der durchstrahlten Schicht abhängt, dort andere Werte vorgetäuscht werden.

Als weitere vorbereitende Messung mußte nun noch die Energieverteilung der Opallampen bestimmt werden. Das geschah in einer einfachen Substitutionsmethode ebenfalls am König-Martens-Spektralphotometer durch Vergleich mit einer von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt an den Punkten $\lambda = 340$ und $\lambda = 650$ mμ am schwarzen Körper geeichten Wolframbandlampe von Osram, welche dafür noch durch ein bekanntes Graufilter NG 3, ebenfalls von Schott u. Gen., abgeschwächt werden mußte. Die Opallampen wurden hierbei und bei allen späteren Messungen nur mit 100 Volt betrieben. Ihre etwas eigenartige Energieverteilung, welche ein Maximum im Rot bei etwa $\lambda = 660$ mμ aufweist, ist durch den starken Abfall der Durchlässigkeitswerte des Opalglases für große Wellenlängen bedingt.

Aus den Werten von Tab. 1 ergeben sich nach Gl. (5) durch graphische Integration die Farbkoordinaten der verschiedenen Filter (Tab. 2).

Tabelle 2

Filter	Punkt im Dreieck	Farbkoordinaten		
		x_1	x_2	x_3
Opallampe	—	890,40	739,44	257,44
N 34	W	130,85	128,27	96,21
N 34 doppelt . . .	W'	21,54	24,35	37,84
G Nr. 2	W''	115,42	67,02	133,04
RG 2a	R	72,62	14,38	0,01
RG 2b	R	82,93	16,48	0,02
VG 2	G	17,73	25,91	3,27
BG 12	B	5,39	5,44	94,68

Diese verschiedenen Farben lassen sich nun in beliebiger Weise mischen, wenn sie übereinander auf die gleiche Fläche des Prismas projiziert werden. Zu diesem Zweck wurde für die Farbfilter folgende Anordnung getroffen: je zwei von ihnen wurden in den Kombinationen Rot (RG 2b) — Grün (VG 2) und Rot (RG 2a) — Blau (BG 12) in der Form von Keilen zusammengestellt, die in Metallrahmen gefaßt wurden. Je zwei Farben bildeten dann zusammen die Form eines Rechtecks derart, daß jede Farbe eines der beiden durch die diagonale Trennungslinie gebildeten rechtwinkligen Dreiecke ausfüllte (Fig. 2a). Diese Rahmen ließen sich auf einer Schiene vor dem Farbspalt

horizontal verschieben. In einer beliebigen Stellung wird dann ein gewisser Bruchteil der gesamten Farbspaltfläche etwa von dem Rotfilter, der Rest dagegen von dem Grün- oder Blaufilter bedeckt. Da ein Verschieben des Rahmens eine stetige Variation dieses Bruches zwischen den beiden Extremwerten bewirkt, in welchen die ganze Spaltfläche nur von dem einen oder anderen der beiden kombinierten Filter bedeckt ist, so lassen sich hiermit zunächst alle die Mischfarben auf dem Prisma erzeugen, welche im Farbendreieck auf der geradlinigen Verbindung der den beiden Filtern zukommenden Punkte liegen. Eine auf dem oberen Rand dieser Rahmen angebrachte Millimeterteilung gestattete die Bestimmung der Flächenverhältnisse und daraus auch der Farbkoordinaten der erzeugten Mischfarbe. Wird jetzt noch der mit dem Filter N 34 bedeckte Weißspalt geöffnet, so lassen sich auf das Prisma alle beliebigen Mischfarben projizieren, welche in dem durch die drei zugehörigen Punkte gebildeten Dreieck innerhalb des Farbendreiecks liegen.

Abb. 2a

Die Berechnung der Farbkoordinaten einer solchen Mischfarbe machte eine Prüfung notwendig, ob alle Flächenelemente des Farbspaltes wie auch des Weißspaltes gleichmäßig durchstrahlt wurden, oder ob eine vielleicht stärkere Durchstrahlung der mittleren Teile des Farbspaltes zu berücksichtigen war. Eine genaue Photometrierung einzelner Flächenelemente des Farbspaltes zeigte, daß ein hierdurch bedingter Fehler maximal niemals größer war als derjenige, der durch das Zusammenkitten der Farbfilter längs ihrer diagonalen Trennungslinie verursacht wurde. Die Punkte auf den Geraden RG und RB konnten in einem Farbendreieck von 40 cm Seitenlänge auf $\pm$ 1—2 mm als sicher bestimmt angesehen werden, die größte Unsicherheit nahe R auf RB betrug noch nicht $\pm$ 3 mm.

Auch die Weißspalte konnten in ihrer Gesamtausdehnung zwar als gleichmäßig durchstrahlt angesehen werden, doch war ihre Helligkeit gegenüber derjenigen einer gleichgroßen Fläche des Farbspaltes um etwa 12% geringer. Dieser Faktor mußte bei der Berechnung der Farbkoordinaten jeder weißverdünnten Farbe berücksichtigt werden.

Es bleibt nun noch die Frage nach der Verwirklichung der beiden für die Messungen gestellten Forderungen offen. Zunächst die Frage nach der Konstanz der Helligkeit. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall geschlossener Weißspalte, so handelt es sich nur um die Farben auf den Verbindungsgeraden RB und RG im

Farbendreieck. Gleichheit zwischen den beiden Gesichtsfeldhälften läßt sich durch Veränderung der Farbspaltbreiten, wodurch der zugehörige Punkt im Farbendreieck nicht geändert wird, stets erreichen. Die alleinige Verschiebung des Farbfilterrahmens nach Abb. 2a bewirkte jedoch eine Zunahme der Helligkeit beim Übergang zu Farben mit größerem Rotgehalt, eine Abnahme in der entgegengesetzten Richtung. Es mußten also zunächst die Helligkeitsverhältnisse RG 2b : VG 2 und RG 2a : BG 12 bestimmt werden. Das geschah mit den Opallampen als Lichtquellen in zwei Methoden: auf der Photometerbank mit einem Bechsteinflimmerphotometer, sowie an der beschriebenen Apparatur selbst in kleinen Stufen, wobei als Zwischenfarben die Mischfarben aus den beiden jeweils zu vergleichenden gewählt wurden. Am Flimmerphotometer mußte zur Bestimmung des großen Verhältnisses Rot : Blau das hellere Rotfilter durch ein bekanntes Graufilter (NG 2 von Schott) abgeschwächt werden, die Photometrierung in kleinen Stufen geschah für diesen Fall in 6, im Falle Rot : Grün in 8 Stufen. Hierbei war das Helligkeitsverhältnis berechenbar aus den Verhältnissen der entsprechenden Farbspaltbreiten. Folgende Werte ergaben sich:

	Flimmerph.	Kl. Stufen	Benutzte Werte
RG 2a : BG 12	6,27	6,33	6,30
RG 2b : VG 2	2,51	2,75	2,56

Anderseits aber können die Helligkeiten und damit auch ihre Verhältnisse aus den Farbkoordinaten nach Gl. (2) berechnet werden. Mit den Helligkeitskoeffizienten nach Kohlrausch[1,2] ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0{,}618$, $\alpha_3 = 0{,}047$) ergibt sich dafür 6,12 bzw. 2,70.

Um nun die für eine Verschiebung des Farbkeilrahmens bei konstanter Farbspaltbreite geforderte Konstanz der Helligkeit zu erreichen, wurde das hellere Rotfilter durch eine keilförmige Metallblende in der durch Abb. 2b angedeuteten Weise abgedeckt. Für die Kombination Rot/Blau zeigte sich dabei, daß der im Farbendreieck etwa in der Mitte zwischen R und B gelegene Punkt erst dann erreicht wurde, wenn der Filterrahmen schon fast ganz

Abb. 2b

1) K. W. F. Kohlrausch, Phys. Ztschr. **21**. S. 396, 423, 473. 1920.

2) Die auch von Schrödinger (a. a. O.) angegebenen Koeffizienten nach Exner ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0{,}756$, $\alpha_3 = 0{,}024$) zeigten sich hier sowohl wie auch bei der späteren Rechnung (§ 4) als ungeeignet.

an das rote Ende geschoben wurde. Die Hälfte der rötlichen Purpurfarben wurde somit auf eine Strecke von etwa 30 mm am Filterrahmen zusammengedrängt, die bläulichen Purpurfarben dagegen auf etwa 170 mm auseinandergezogen. Die Durchführung der Messung auch bei den rötlichen Purpurfarben gelang aber mit der zweiten, in Abb. 2c wiedergegebenen Abdeckung, bei welcher der Strecke von 125 mm am Rahmen etwa $^2/_3$ der Stecke RB im Farbendreieck entsprachen. Das Gebiet der Purpurfarben wurde danach in zwei sich teilweise überdeckende Gebiete zerlegt. Für die einzelnen Strecken in den Abb. 2a, b, c ergaben sich danach folgende Maße in Millimetern:

Abb. 2c

	H	h	h_1	h_2	$H - h_2$
Rot-Blau	22,0	3,5	10,5	13,75	8,25
Rot-Grün	22,6	8,8	—		—

Aus der jetzt erreichten Konstanz der Helligkeit für die gesättigten Farben ergibt sich dieselbe auch sofort für die weißverdünnten, wenn die Forderung gestellt wird, daß bei Konstanthaltung der Fläche des Weißspaltes und der Breite des Farbspaltes eine Variation der Mischfarbe lediglich durch eine Verschiebung des Filterrahmens hervorgerufen werden soll.

Diese Einschränkung aller möglichen Variationen erfüllt nun auch gleichzeitig die zweite Forderung, daß die veränderliche Farbe, welche bei den Messungen auf größte Ähnlichkeit mit einer festen Farbe eingestellt werden soll, sich im Farbendreieck auf einer geraden Linie bewegt. Die Gleichung einer Geraden ist gegeben durch eine homogene lineare Beziehung

$$y_1 + A\,y_2 + B\,y_3 = 0 \tag{6}$$

zwischen den drei Farbkoordinaten y_1, y_2, y_3. Ist b die Breite des Farbspaltes, so sind — etwa am Rot-Grünrahmen — die Farbkoordinaten für das reine Rot gegeben durch bhx_i, die für das reine Grün durch bHX_i, die Koordinaten einer beliebigen Mischfarbe aber durch $M_i = \varepsilon bHX_i + (1-\varepsilon)bhx_i$ mit $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$. Wird jetzt noch der Weißspalt auf die Fläche f geöffnet, so muß zunächst f für die Rechnung um etwa 12 % auf f' verkleinert werden, worauf dann die mit f' multiplizierten Koordinaten w_i (etwa des Filters N 34 von Tab. 2), jeweils zu den obigen addiert, die Farb-

koordinaten der drei ungesättigten Farben ergeben. Erfüllen sowohl die $bhx_i + f' w_i$ für das weißverdünnte Rot wie auch die $bHX_i + f' w_i$ für das weißverdünnte Grün die Gl. (6), so gilt dasselbe auch für die Koordinaten $M_i + f' w_i$ der weißverdünnten Mischfarbe für alle ε zwischen 0 und 1, woraus die geforderte Geradlinigkeit folgt.

Für Farbmessungen wie die hier durchgeführten werden im allgemeinen einige Vorschriften[1]) gemacht, die eine Gewähr für reines Zapfensehen, auf welches sich die Schrödingersche Theorie ausschließlich bezieht, bieten sollen. Dazu gehört einerseits die durch die Blenden B_3 und B_4 erfüllte Beschränkung des Gesichtsfeldes auf einen Kreis von nicht mehr als $1{,}5^0$ Durchmesser, anderseits aber die Forderung einer Mindesthelligkeit des Gesichtsfeldes von 10 Asb. Wie sofort zu übersehen ist, trat bei der beschriebenen Anordnung der ungünstigste Fall dann ein, wenn der Farbspalt nur vom Blaufilter bedeckt war, also wegen der Abdeckung des Rotfilters bei allen bläulichen Purpurfarben. Die mit einem Zeissschen Stufenphotometer nach Pulfrich durchgeführte Messung lieferte in diesem Falle bei verschiedenen Spaltöffnungen Helligkeiten von 7,5—10 Asb, bei den Mischfarben aus Rot und Grün dagegen sowie bei den rötlichen Purpurfarben Werte um 15 Asb, so daß die geforderte Mindesthelligkeit nur bei wenigen Messungen nicht voll erreicht wurde.

§ 3. Die Messungen und ihre Ergebnisse

Wenn vor die Farbspalte der beiden Projektionseinrichtungen bei geschlossenen Weißspalten 2 gleiche Filterrahmen — jede der beiden Farbkombinationen war doppelt vorhanden — in geometrisch gleiche Stellungen geschoben wurden, so mußte im Gesichtsfeld Gleichheit zwischen den beiden Hälften lediglich durch einen Helligkeitsausgleich zu erreichen sein. Dies wurde für verschiedene Mischfarben, die im Farbendreieck auf den Geraden RG und RB lagen und daraufhin untersucht wurden, von der Versuchsanordnung an allen Stellen gut erfüllt, so daß Bedenken gegen die Koordinatenberechnung aus den Flächenverhältnissen nicht vorhanden waren.

Die Methode, welche zur Ermittlung ähnlichster Farben führte, kann als ein Herstellungsverfahren bezeichnet werden. Das bedeutet, daß der Beobachter durch Variation eines Parameters an der Apparatur die ähnlichste Farbe selbst einzustellen hatte. Da subjektive Einzelmessungen dieser Art stets Schwankungen unterliegen, wurden die Farbkoordinaten der zu einer festen Farbe gefundenen ähnlichsten

1) Din 5033 Bewertung und Messung von Farben.

erst für den Mittelwert aus je 20 Einzeleinstellungen berechnet. Das Gipsprisma stand frei und war gegen eine allgemeine Raumbeleuchtung nicht abgeschirmt, so daß Messungen nur im verdunkelten Zimmer vorgenommen werden konnten. Zur Vermeidung des Stäbchensehens wurde daher nach wenigen Einstellungen die Messung unterbrochen und das Auge an einer vom direkten Tageslicht beschienenen hellgrauen Fläche neu helladaptiert. Unterbrechung nach je 4 Einzeleinstellungen war bei den Mischfarben aus Rot und Grün vollkommen ausreichend, wiederholte Prüfungen mit Unterbrechung nach je 1, 2 oder 5 Einzelmessungen ergaben an den verschiedensten Stellen im Farbendreieck keine Änderung des Ergebnisses. Wegen der geringeren Gesamthelligkeit des Gesichtsfeldes bei den bläulichen Purpurfarben wurden die Pausen in diesem Gebiet und auch bei den rötlichen Purpurfarben schon nach je 2 Einzeleinstellungen eingeschaltet; die gleiche Prüfung wie oben ergab auch hier keine Änderung des Resultates.

Die Messung begann damit, daß zunächst in beiden Gesichtsfeldhälften gleiche gesättigte Farben der Linien RG oder RB im Farbendreieck eingestellt wurden. Öffnete man jetzt auf der einen Seite den mit dem Filter N 34 bedeckten Weißspalt um ein festgesetztes Stück, so wurde die entsprechende Seite des Gesichtsfeldes heller, die Farbe selbst ungesättigter. Zunächst ließ sich die gleiche Helligkeit durch eine fast monochromatische Photometrie mittels einer Verbreiterung des Farbspaltes der gesättigten Farbe, wodurch deren Ort im Farbendreieck ungeändert blieb, leicht wieder herstellen. Auf dieser Seite der Anordnung wurde nun nichts mehr geändert, sondern lediglich durch eine Verschiebung des Farbfilterrahmens auf der Seite der weißverdünnten Farbe die Einstellung auf größte Ähnlichkeit vorgenommen und der zugehörige Punkt im Farbendreieck ermittelt. Dasselbe wurde für diese feste Farbe mit verschiedenen variablen Farben, die sich voneinander in der Größe der Weißbeimischung unterschieden, durchgeführt. Damit wurde also Schritt für Schritt der Abstand der variablen weißverdünnten Farbe von der festen Farbe vergrößert. Die so erhaltenen Punkte im Farbendreieck wurden durch eine Linie verbunden, welche als die zu dem festen Punkt gehörige W-Kurve größter Ähnlichkeit bezeichnet werden kann. Diese Messungen wurden für eine größere Anzahl fester gesättigter Farben durchgeführt, wobei sich zugleich zeigte, daß eine Verlegung der variablen ungesättigten Farbe von der einen auf die andere Seite des Gesichtsfeldes keinen Einfluß auf das Ergebnis hatte.

Das anschauliche Bild zu dem Ergebnis dieser Messungen vermittelt Abb. 3; hier sind die Variationsgeraden, längs deren sich die

veränderlichen Farben bewegten, noch nicht mit eingezeichnet, da ihre Lage in Abb. 6 (gerissene Linien) dargestellt ist. Abb. 3 zeigt, daß die W-Kurven größter Ähnlichkeit, soweit die Meßgenauigkeit ergibt, Geraden sind, die aber nicht im Punkt W der zugemischten Farbe des Weißspaltes zusammenlaufen. Auch der Mittelpunkt M des Dreiecks, welcher dem reinen Weiß entspricht, und dem die hier benutzte Farbe W nur angenähert nahe kommt, spielt keine

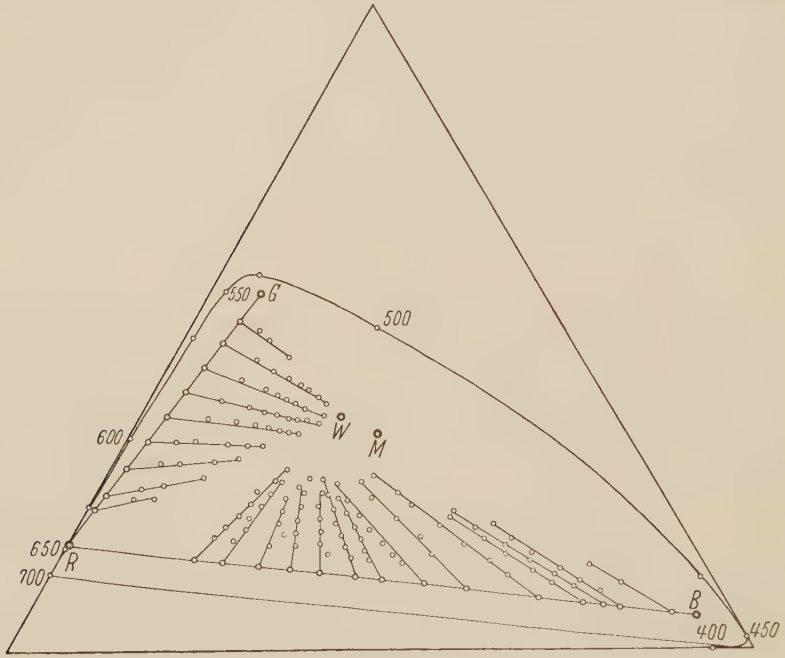

Abb. 3

ausgezeichnete Rolle[1]). Auffallender jedoch erscheint die Tatsache, daß die gefundenen Linien die unerwartet einfache Gestalt von Geraden annehmen.

Daher wurde die weitere Frage einer kurzen Betrachtung unterzogen, wie sich die Kurven ähnlichster Einstellung bei Zumischung einer ausgesprochenen Farbe verhalten, wodurch sofort auch die Lage der Variationsgeraden verändert wird. Von dieser neuen Farbe soll gefordert werden, daß sie, von der festgehaltenen gesättigten Farbe aus gesehen, auf der anderen Seite von M liegen soll als W.

1) Es ist anzunehmen, daß infolge der Messung das Auge umgestimmt wird, so daß es die Farbe W als reines Weiß empfindet. Dann ist es nicht zu verwundern, daß dem Punkt M keine Bedeutung mehr zukommt.

Für die Messungen an den Purpurfarben gelang dies sehr einfach dadurch, daß das Filter N 34 doppelt vor den Weißspalt gesetzt wurde, wodurch sich nach Tab. 3 der Punkt W' ergab. Aus Abb. 6 ist zu ersehen, daß bei Zumischung von W die Variationsgeraden sich im blauen Gebiet des Farbendreiecks zusammendrängen. Das ist bei Zumischung von W' in noch stärkerem Maße der Fall. Werden nun entsprechende Messungen wie bisher unter diesen ge-

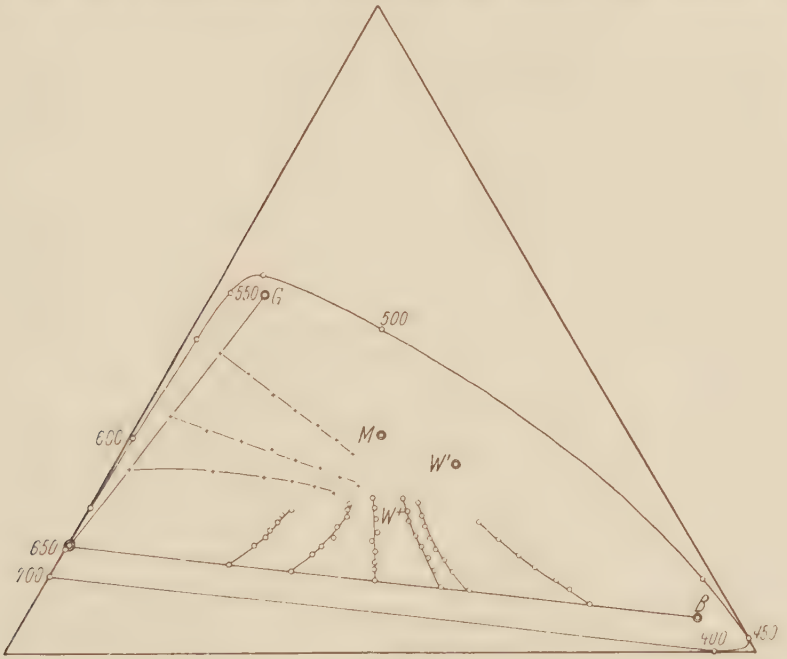

Abb. 4

änderten Umständen durchgeführt, so ergibt sich das in Abb. 4 dargestellte Resultat. Die W'-Kurven größter Ähnlichkeit für die Purpurfarben sind keine Geraden mehr, sondern gekrümmt, und erinnern an das Bild der sich aus dem Schrödingerschen Linienelement ergebenden geodätischen Linien durch den Weißpunkt. Entsprechende Messungen wurden nun auch für die Mischfarben aus Rot und Grün durchgeführt, wofür sich das Filter G 2 (Tab. 2) als geeignet erwies. Dieses eine ungesättigte Purpurfarbe darstellende Filter wurde vor den Weißspalt statt des Filters N 34 gesetzt. Die dadurch bedingte Veränderung der bisherigen, ebenfalls aus Abb. 6 ersichtlichen Variationsgeraden ist nicht auffallend; während sie bisher, bei Zumischung der Farbe W, annähernd parallel

zu RG verliefen, werden sie jetzt im roten Gebiet schwach zusammengedrängt. Das Ergebnis dieser Messungen sind die ebenfalls in Abb. 4 eingetragenen W''-Kurven größter Ähnlichkeit, die durch + gekennzeichnet sind. Auch hier ist, wie erwartet, keine völlige Geradlinigkeit mehr vorhanden.

Bei der Durchführung der Messungen war es auffallend zu beobachten, daß die bei einer Verschiebung der veränderlichen ungesättigten Farbe längs einer der Variationsgeraden eintretende Sättigungsänderung vom Auge gegenüber der starken Farbtonänderung überhaupt nicht empfunden wurde. Dabei blieb es gleichgültig, ob diese Variationsgerade durch Zumischung von W, W' oder W'' entstanden waren. Der Beobachter führte vielmehr die Einstellung auf größte Ähnlichkeit in der Meinung aus, sein Urteil nur auf den Farbton zu beziehen. Aus den allgemeinen Gedanken der Theorie ist zu folgern, daß Farben gleichen Farbtons sich aus Einstellungen auf größte Ähnlichkeit dann ergeben werden, wenn die veränderliche der beiden zu vergleichenden Farben sich nicht auf einer geraden Linie, sondern auf einer Linie konstanter Sättigung im Farbendreieck unter der weiteren Bedingung der Konstanz und Gleichheit der Helligkeiten bewegt, eine Forderung, die experimentell nur schwer zu erfüllen ist. Hinzu kommt, daß Farben empfindungsgemäß gleicher Sättigung nur unvollkommen bekannt sind. Farben gleichen Farbtons müssen der Bedingung gehorchen, daß aus der Beziehung A farbtongleich B auch die Umkehrung B farbtongleich A folgt. Sollen nun durch Messungen in der beschriebenen Weise farbtongleiche Farben ermittelt werden, so drückt sich diese Bedingung folgendermaßen aus: es wird zunächst eine gesättigte Farbe A in der einen Hälfte des Gesichtsfeldes festgehalten, in der anderen Hälfte dagegen die Farbe bei geringerer, aber in sich konstanter Sättigung so lange variiert, bis die zu A ähnlichste B gefunden ist. Dann ist B farbtongleich A. Jetzt wird B festgehalten, die bisher feste Farbe dagegen auf der durch A gehenden Linie konstanter Sättigung so lange verändert, bis die zu B ähnlichste A' bestimmt ist. Dann ist A' farbtongleich B. A und A' haben gleiche Sättigung. Wenn der Farbton ein eindeutiges Merkmal der Farbe ist, so muß bei der Messung A' mit A zusammenfallen, die Messung sich also umkehren lassen.

Bei den hier ausgeführten Bestimmungen ähnlichster Farben unter der allgemeineren Bedingung der Variation längs einer sehr willkürlichen Geraden führt eine solche Umkehrung zu neuen Ergebnissen. Liegt eine feste Farbe C etwa auf der Geraden RG und ist D eine dazu gefundene ähnlichste, die auf einer der Variations-

geraden liegt, so ist zu der *festen* Farbe D die ähnlichste unter allen Farben von RG nicht mehr C, sondern C'. Um dies zu zeigen, wurden auch einige Messungen dieser Art durchgeführt. Eine ungesättigte Farbe wurde durch Zumischung von W — wofür man aber auch ebensogut W' oder W'' hätte nehmen können, das Ergebnis ist davon unabhängig — in der einen Gesichtsfeldhälfte eingestellt und nicht verändert, dazu dann in der anderen Hälfte

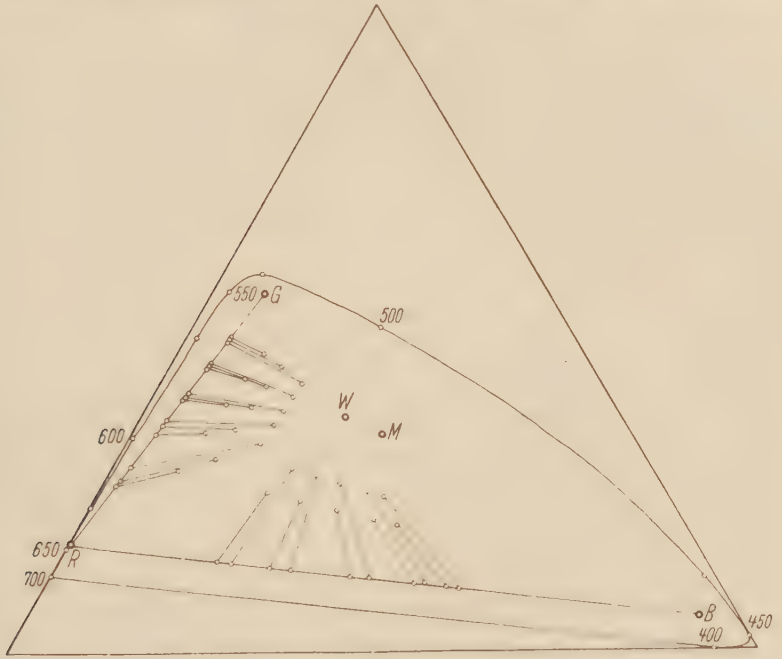

Abb. 5

die ähnlichste Farbe der Linie RG bzw. RB bestimmt. Beide Punkte im Farbendreieck wurden durch eine Gerade verbunden. So entstand Abb. 5.

Diese Geraden stimmen nun nicht mehr mit den in Abb. 3 gezeichneten überein, sie konvergieren schwächer bei den Purpurfarben, stärker dagegen bei den Mischfarben Rot und Grün.

Ursprünglich bestand die Absicht, diese Messungen auch auf das Gebiet der blaugrünen Farben auszudehnen, um auch hier einen Vergleich mit der Theorie durchzuführen. Die Lage der Punkte G und B im Farbendreieck zeigt jedoch, daß mit den bisher benutzten Filtern nur sehr ungesättigte Mischfarben zu erhalten sind, wenn das Grün- und Blaufilter entsprechend den bis-

herigen Anordnungen in einem Metallrahmen kombiniert werden. Es liegen dann für derartige Messungen schon sehr ungünstige Verhältnisse vor, welche nur durch Benutzung sehr gesättigter Blaugrünfilter umgangen werden könnten. Solche Filter aber waren nicht vorhanden. Da schon bei den bisherigen Ergebnissen, wie noch gezeigt werden soll, ein Versagen der Theorie festzustellen war, wurde auf weitere Messungen verzichtet.

Ehe auf die Durchführung dieses Vergleiches eingegangen werden soll, sei noch die Genauigkeit erörtert, mit welcher bei je 20 Einzeleinstellungen ein mittlerer Wert reproduziert wurde. Für diese 20 verschiedenen Einstellungen, die zu einem Punkt im Farbendreieck führten, wurde aus den Ablesungen an der oberen Rahmenteilung der Mittelwert gebildet und für diesen die Farbkoordinaten berechnet. Bezeichnet l diesen Mittelwert, l_1 bis l_{20} die Einzelablesungen, so kann die mittlere absolute Schwankung

$$s = \frac{1}{20} \sum_{1}^{20} |l - l_i|$$

als ein Maß für die Unsicherheit des Augenurteils angesehen werden. Diese war relativ am größten bei den rötlichen Purpurfarben. Wurden für die Rahmenstellungen $l + s$ und $l - s$ die Punkte im Farbendreieck berechnet, so ergab sich im Höchstfalle in einem Dreieck von 40 cm Seitenlänge eine Verschiebung des dem Mittelwert l zugeordneten Punktes um $\pm$ 5 mm längs seiner Variationsgeraden.

§ 4. Vergleich mit dem Linienelement von Schrödinger

Der Vergleich mit der Theorie wird so durchgeführt, daß durch Rechnung die Fußpunkte der geodätischen Lote, die von einigen festen, auf RG bzw. RB liegenden Ausgangspunkten auf die Variationsgeraden gefällt werden, berechnet werden unter der Voraussetzung, daß die zugemischte Farbe W ist. Das Linienelement kann zunächst dadurch umgeformt werden, daß als Koordinaten nicht mehr die drei Grundempfindungskomponenten x_1, x_2, x_3 angesehen werden, sondern ihre mit den entsprechenden Helligkeitskoeffizienten multiplizierten Werte:

$$\xi_i = \alpha_i x_i.$$

Dann wird aus Gl. (1):

$$ds^2 = \frac{1}{h} \left\{ \frac{d\xi_1^2}{\xi_1} + \frac{d\xi_2^2}{\xi_2} + \frac{d\xi_3^2}{\xi_3} \right\}; \tag{7}$$

wobei durch

$$h = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \tag{8}$$

die Helligkeit der betreffenden Farbe bestimmt wird. Der durch (3) gegebene Abstand zweier Punkte ist in den ξ_i geschrieben

$$(9)\qquad \int_{\Xi}^{\xi} ds = \sqrt{\left(\lg \frac{h(\xi)}{h(\Xi)}\right)^2 + 4\left(\arccos \frac{\sqrt{\xi_1 \Xi_1} + \sqrt{\xi_2 \Xi_2} + \sqrt{\xi_3 \Xi_3}}{\sqrt{h(\xi)}\sqrt{h(\Xi)}}\right)^2}.$$

Von diesem ist das Minimum zu bestimmen unter den Nebenbedingungen, daß erstens die Helligkeiten der beiden Farben Ξ und ξ konstant und gleich sind, oder

$$(10)\qquad \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

ist, daß zweitens die Farbe Ξ konstant gehalten wird, und daß drittens die Farbe ξ auf einer geraden Linie im Farbendreieck variiert, oder

$$(11)\qquad \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 = 0$$

ist. Aus (10) und (11) folgt sofort

$$(12)\qquad \xi_2 = A_2 + B_2 \xi_1, \qquad \xi_3 = A_3 + B_3 \xi_1$$

mit

$$(13)\qquad \begin{cases} A_2 = \dfrac{\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3}{1 - \dfrac{a_2}{a_3}}, & B_2 = \dfrac{1 - a_3}{a_3 - a_2}, \\ A_3 = \dfrac{\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3}{1 - \dfrac{a_3}{a_2}}, & B_3 = \dfrac{1 - a_2}{a_2 - a_3}. \end{cases}$$

Dann ist

$$(14)\qquad \int_{\Xi}^{\xi} ds \sim \arccos \frac{\sqrt{\xi_1 \Xi_1} + \sqrt{(A_2 + B_2 \xi_1)\Xi_2} + \sqrt{(A_3 + B_3 \xi_1)\Xi_3}}{\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3} = \arccos \psi(\xi_1).$$

Für das Minimum dieses Abstandes ergibt sich aus

$$(15)\qquad \frac{d}{d\xi_1} \arccos \psi(\xi_1) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d}{d\xi_1} \varphi(\xi_1) = 0,$$

wobei mit $\varphi(\xi_1)$ der Zähler von $\psi(\xi_1)$ bezeichnet ist, die Gleichung

$$(16)\qquad \sqrt{\frac{\Xi_1}{\xi_1}} + B_2 \sqrt{\frac{\Xi_2}{A_2 + B_2 \xi_1}} + B_3 \sqrt{\frac{\Xi_3}{A_3 + B_3 \xi_1}} = 0.$$

Das ist eine Gleichung vierten Grades für ξ_1. Das Verfahren, für jeden zu berechnenden Punkt diese Gleichung aufzustellen und zu lösen, ist sehr umständlich. Es wurden daher in der Form einer Tabelle für jeden Fall die Funktionswerte von $\varphi(\xi_1)$ für verschiedene Werte von ξ_1 berechnet und aus dem Kurvenverlauf der Wert ξ_1' für das Maximum von $\varphi(\xi_1)$, welches einem Minimum von $\arccos \psi(\xi_1)$ entspricht, entnommen.

Da sich (vgl. S. 650) gezeigt hatte, daß die gemessenen Helligkeitsverhältnisse der Farbfilter sich gut mit den Helligkeitskoeffizienten von Kohlrausch berechnen lassen, ist ihre Einführung in das Schrödingersche Linienelement naheliegend. Betrachtet sei als Beispiel der Fall, daß die feste gesättigte Farbe eine Mischfarbe aus Rot und Blau ist und die Grundempfindungskoordinaten

$$X_1 = 77{,}3, \qquad X_2 = 16{,}3, \qquad X_3 = 20{,}9$$

besitzt. Dann ist

$$\xi_1 = 77{,}3, \qquad \xi_2 = 10{,}08, \qquad \xi_3 = 0{,}983.$$

Zwei Punkte der Variationsgeraden ergeben sich dadurch, daß der Weißspalt auf 10,01 mm² Fläche (schon um 12 % reduziert) geöffnet wird, der Farbspalt eine Breite von 3,6 mm erhält, und das Farbfilter Rot–Blau mit der zweiten Abdeckung (Abb. 2c) das eine Mal an das rote Ende, das andere Mal an das Ende der Abdeckung geschoben wird. Die beiden so bestimmten Punkte haben die Koordinaten

$$x_1' = 45{,}48, \qquad x_2' = 19{,}71, \qquad x_3' = 10{,}02,$$
$$x_1'' = 41{,}85, \qquad x_2'' = 21{,}22, \qquad x_3'' = 58{,}52.$$

Mit den Koeffizienten nach Kohlrausch sind hiernach und nach Gl. (11) die Bestimmungsstücke der Variationsgeraden

$$a_2 = -\,3{,}85256, \qquad a_3 = +\,3{,}14803,$$

und daraus folgt die Tabelle

$\xi =$	69,0	69,1	69,2	69,3	69,4	69,5
$\varphi(\xi_1) =$	87,6543	87,6573	87,6584	87,6574	87,6538	87,6472

Aus der hieraus zu zeichnenden Kurve ergibt sich für den Extremwert $\xi_1' = 69{,}21$; dieser Punkt hat die Grundempfindungskoordinaten

$$x_1 = 69{,}21, \qquad x_2 = 29{,}98, \qquad x_3 = 14{,}63.$$

Es ist in Abb. 6 von den beiden mit × bezeichneten Punkten derjenige mit der geringeren Blaukomponente[1]).

In dieser Weise wurde nun ein ganzes System von Punkten sowohl für Purpurfarben wie auch für die Mischungen aus Rot und Grün unter der Annahme berechnet, daß stets die zugemischte Farbe W ist. Somit ließ sich das in Abb. 6 wiedergegebene System

1) Dasselbe Beispiel, durchgeführt mit den Exnerschen Koeffizienten, ergibt auf der gleichen Variationsgeraden einen außerhalb des Farbendreiecks gelegenen Punkt. Die zugehörige Farbe würde eine negative x_3-Komponente besitzen und dadurch irreell werden.

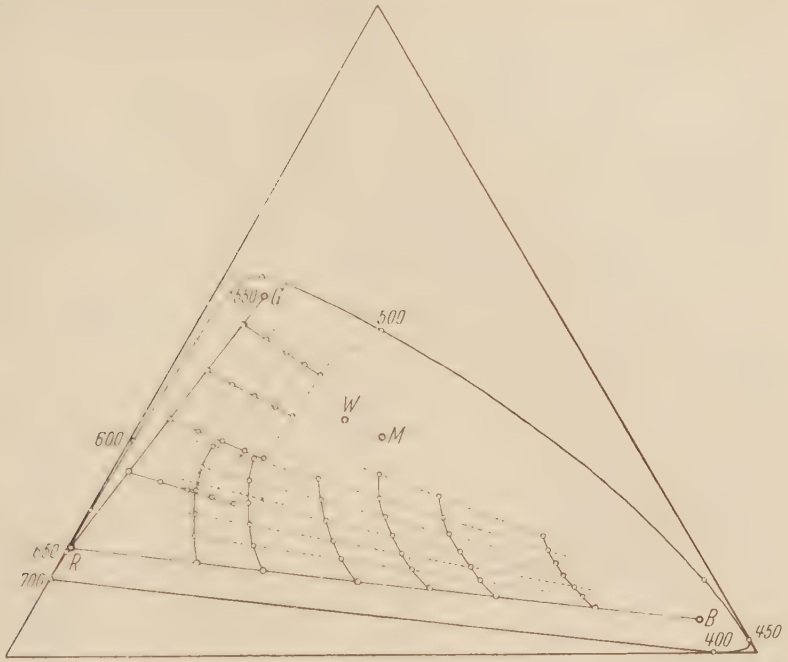

Abb. 6

von theoretischen W-Kurven größter Ähnlichkeit zeichnen, wenn wieder wie bei den experimentellen Kurven die zu demselben Ausgangspunkt gehörenden Punkte miteinander verbunden werden. Ein Vergleich mit Abb. 3 zeigt, daß zwischen beiden keinerlei Übereinstimmung besteht. Während die Messung Geraden lieferte, ist dies bei den berechneten Kurven für das Purpurgebiet nicht mehr der Fall. Aber auch die Geraden, welche die Rechnung für die

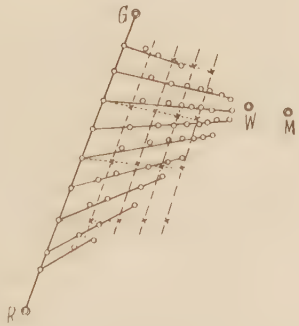

Abb. 7a

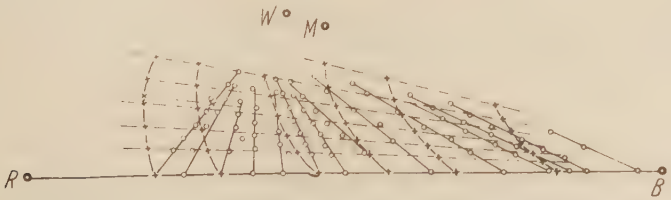

Abb. 7b

Rot–Grün-Mischungen ergibt, stimmen nicht mit den gemessenen überein. Um das zu zeigen, sind in den Abb. 7a und 7b, getrennt für die Mischfarben aus Rot und Grün, sowie Rot und Blau, die gemessenen (○)- und berechneten (+)-Kurven entsprechend Abb. 3 und 6 vereinigt. In diesen zeigt sich, daß die Abweichungen stets am größten werden, je näher die betrachteten Punkte an R liegen, während (Abb. 7a) zwischen den beiden dem Punkt G benachbarten Geraden fast genaue Übereinstimmung besteht. Bei den Purpurfarben tritt dieser Fall niemals ein.

Das obige Beispiel zeigte, daß beim Übergang von den Exnerschen Helligkeitskoeffizienten zu den von Kohlrausch angegebenen der Punkt der größten Ähnlichkeit oder des geringsten Abstandes von dem festen Ausgangspunkt sehr weit verschoben wurde zugunsten der Theorie, und zwar von einem Punkt außerhalb des Dreiecks auf den angegebenen. Dieses Verhalten ließ den Versuch aussichtsreich erscheinen, durch eine weitere Veränderung der Helligkeitskoeffizienten zunächst wenigstens in diesem einen Fall Übereinstimmung zwischen Messung und Theorie zu erzwingen mit dem Ziel, allgemein damit vielleicht ein Verschwinden der größten Unterschiede zu erreichen. Dazu war es zweckmäßiger, wieder auf die alte, durch (1) gegebene Form des Linienelements in Grundempfindungskoordinaten zurückzugehen. An Stelle der Gl. (16) ergibt sich dann

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = \sqrt{\frac{X_1}{x_1}} + \alpha_2 B_2' \sqrt{\frac{X_2}{x_2}} + \alpha_3 B_3' \sqrt{\frac{X_3}{x_3}}, \tag{17}$$

wobei die Größen

$$a_2' = 4{,}163, \qquad a_3' = -\,6{,}965$$

jetzt die Variationsgerade bestimmen und

$$B_2' = \frac{\alpha_3 - \alpha_3'}{a_3' a_2 - a_2' \alpha_3}, \qquad B_3' = \frac{\alpha_2 - a_2'}{a_2' \alpha_3 - a_3' \alpha_2}$$

ist. In (17) ist nicht nur der der Ausgangspunkt X_1, X_2, X_3, sondern auch der Punkt größter Ähnlichkeit x_1, x_2, x_3 jetzt fest und durch die Messung gegeben. Wird die aus den Messungen sich ergebende Gerade mit der Variationsgeraden zum Schnitt gebracht, so erhält man hierfür

$$x_2 : x_1 = 0{,}4452, \qquad x_3 : x_1 = 0{,}4097$$

(in Abb. 6 der mit × bezeichnete Punkt mit dem größeren Blaugehalt). Die Werte selbst bestimmen sich für jedes Helligkeits-

koeffizientenpaar aus der Bedingung der Helligkeitsgleichheit zwischen den Punkten X und x:

$$X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Gl. (17) ist als eine Funktion von α_2 und α_3 aufzufassen, deren Nullstellen gesucht sind. Es läßt sich leicht eine Tabelle der Funktionswerte von dq/dx_1 für verschiedene Werte der Helligkeitskoeffizienten anlegen, aus der zu ersehen ist, daß innerhalb eines begrenzten Bereiches für α_2 und α_3 ein Verschwinden des Ausdruckes (17) nicht eintritt.

	$\alpha_3 = 0{,}01$	0,03	0,05	0,07
$\alpha_2 = 0{,}4$	0,2810	0,2427	0,2249	0,2147
$= 0{,}6$	0,2949	0,2574	0,2362	0,2235
$= 0{,}8$	0,3043	0,2683	0,2469	0,2316

Der Bereich für die angenommenen Werte von α_2 und α_3 ist begrenzt durch die Forderung, daß diese Koeffizienten noch als Helligkeitskoeffizienten gedeutet werden können; sie dürfen also von den von Kohlrausch angegebenen und hier stets benützten nicht allzu stark abweichen, da die mit ihnen errechneten Helligkeitsverhältnisse der Farbfilter mit den gemessenen in Übereinstimmung bleiben müssen. Unter dieser Voraussetzung läßt sich aber die erhoffte Übereinstimmung nicht erzielen, vielmehr zeigt die Übersicht, daß hierfür α_2 möglichst klein, womöglich negativ, α_3 dagegen möglichst groß gemacht werden müßte. Es ist also nicht möglich, allein durch geeignete Wahl der Helligkeitskoeffizienten die mit dem Schrödingerschen Linienelement durchgeführten Rechnungen dem Meßergebnis anzupassen.

Zusammenfassung

Es konnte gezeigt werden, daß Einstellungen auf größte Ähnlichkeit, die unter der vereinfachenden Bedingung der Variation der veränderlichen Farbe längs einer Geraden im isolychnischen Farbendreieck vorgenommen wurden, sich durch das Schrödingersche Linienelement nicht darstellen lassen. Abweichend von den Feststellungen von Klughardt und Richter traten die größten Abweichungen der Theorie hier nicht bei den blauen, sondern bei den roten Farben ein. Dieses Ergebnis trägt zunächst nur subjektiven Charakter, denn die Messungen wurden nur vom Verf. durchgeführt, für dessen Augen normale trichromatische Farben-

tüchtigkeit durch Einstellung der Rayleighgleichung am Anomaloskop nachgewiesen wurde. Wiederholte, aber nicht systematisch ausgeführte Messungen anderer farbentüchtiger Beobachter lieferten indessen gleiche oder nur unbedeutend abweichende Ergebnisse.

Dem Direktor des Physikalischen Instituts, Herrn Prof. Dr. Cl. Schaefer, fühle ich mich nicht nur für die Anregung zu dieser Arbeit, sondern auch für seine stete und wohlwollende Förderung zu tiefem Dank verpflichtet, sowie für die Bereitwilligkeit, mit der er die Mittel des Instituts für die Untersuchungen zur Verfügung stellte. Ebenso darf ich an dieser Stelle Frau Dr. O. Matossi-Riechemeier meinen besonderen Dank aussprechen. Ihr habe ich viele wertvolle Ratschläge zu verdanken.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, im Mai 1938.

(Eingegangen 28. Mai 1938)

Lebenslauf.

Am 15. Juni 1911 wurde ich als Sohn des Justizamtmanns Fritz Rosemann und seiner inzwischen verstorbenen Ehefrau Gertrud, geb. Zelfel, in Sagan (Schles.) geboren. Ich bin arischer Abstammung und deutscher Staatsangehöriger.

Bis Juni 1919 besuchte ich die jetzige Bender-Oberrealschule zu Breslau, anschließend bis Juni 1927 das städtische Reform-Realgymnasium zu Görlitz und danach das Gymnasium zum Heiligen Geist in Breslau, welches ich Ostern 1929 mit dem Zeugnis der Reife verließ. An den Universitäten München und Breslau studierte ich darauf Mathematik und Naturwissenschaften und legte im Juli 1934 die wissenschaftliche Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Nach kurzer Tätigkeit als Studienreferendar diente ich freiwillig ein Jahr im Heer und arbeitete dann im Physikalischen Institut der Universität zu Breslau an der vorstehenden Dissertation.

Joachim Rosemann.